Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2011/12
KOLOKWIUM II

04/01/2012

Zadanie 1.
Niech μ będzie miarą na $[-1, 2]$ zadaną w następujący sposób: jest to miara Lebesgue'a z gęstością $f(x) = x^2$, dodatkowo miara ta ma atomy w punktach $-1, 0, 1, 2$, o masach $\frac{1}{4}$. Oblicz całkę miarą μ z funkcji $g(x) = x$.

Zadanie 2.
Niech μ będzie miarą na prostej o dystrybuancie $F(x) = \begin{cases} \arctan x; & x < 2 \\ 1 + \arctan x; & x \geq 2. \end{cases}$
Oblicz całkę
$$\int_{[-1,3)} 1 + x^2 \, d\mu.$$
Wskazówka: Najpierw znajdź gęstość i atomy tej miary.

Zadanie 3.
Niech $f_n = e^{-x} \cos(\frac{x}{n})$. Oblicz (o ile istnieje) granicę
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n \, dx.$$
(Podaj konkretną liczbową wartość tej granicy i uzasadnij zbieżność.)

Zadanie 4.
Oblicz miarę produktową Lebesgue'a zbioru na płaszczyźnie zawartego pomiędzy wykresami funkcji $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.

Zadanie 5.
Dane są dwie (dowolne) przestrzenie miarowe $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ oraz dwie nieujemne funkcje mierzalne (gęstości): f (określona na X) i g (określona na Y). Udowodnij, że miara produktowa $\mu_f \times \nu_g$ (gdzie μ_f to miara μ z gęstością f, a ν_g to miara ν z gęstością g) jest równa mierze $(\mu \times \nu)_{fg}$, czyli mierze produktowej $\mu \times \nu$ z gęstością fg określoną na produkcie $X \times Y$ wzorem $fg(x, y) = f(x)g(y)$ (iloczyn funkcji jednej zmiennej, każda swojej).
Wskazówka: Oblicz całki obiema miarami $\mu_f \times \nu_g$ i $(\mu \times \nu)_{fg}$ z dowolnej (co nie znaczy ,,jednej przykładowej", tylko ,,każdej") funkcji dwóch zmiennych $h(x, y)$. Obie całki oblicz stosując Twierdzenie Fubiniego i to jak się całkuje miarą z gęstością. Zobacz, że wyjdzie to samo!

Tomasz Downarowicz